

مدارهای R-C جریان متناوب

هدف های رفتاری

در پایان این فصل از هنرجو انتظار می رود :

- ۱- مقادیر مقاومت ظاهری، اختلاف فاز، جریان، ولتاژ، ضریب توان و ضریب کیفیت مدارهای R-C سری و موازی را با نوشتن فرمول های مربوط محاسبه کند.
- ۲- دیاگرام برداری ولتاژها را در مدارهای R-C سری و جریان ها را در مدارهای R-C موازی رسم کند.
- ۳- ضریب کیفیت مدارهای R-C سری و موازی را محاسبه کند.
- ۴- تأثیر فرکانس بر مقاومت ظاهری، جریان، اختلاف فاز و ضریب قدرت در مدارهای R-C سری و موازی را شرح دهد.
- ۵- منحنی تغییرات اثر فرکانس بر امپدانس و جریان در مدارهای R-C سری و موازی را با استفاده از معادله آن و از طریق نقطه یابی رسم کند.
- ۶- معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای R-C سری و موازی را به دست آورد.
- ۷- مدارهای R-C سری را به موازی و بالعکس تبدیل کند.

۴-۱- مقدمه

کاربرد عناصر اهمی و خازنی در مدارهای الکترونیکی، مخابرات، الکترونیک صنعتی و شبکه های قدرت مثلاً فیلترها^۱، تایمرها^۲، تصحیح کننده ضریب توان^۳، ضرورت بحث مدارهای R-C را ایجاب

۱- فیلترها مدارات R-L-C هستند که می توانند امواج خاص را عبور دهند یا حذف کنند.

۲- تایمرها دستگاهی هستند که با استفاده از مقادیر R-C، به رله ها فرمان می دهند.

۳- در صنعت برق اثرات سلفی را با خازن ها و اثرات خازن را با سلف ها برای کاهش توان راکتیو خنثی می کنند این عمل

را که ضریب توان را به نزدیکی $\cos \varphi = 1$ می رساند اصلاح ضریب توان گویند.

می‌کند. از طرف دیگر، خازن ایده‌آل عملاً وجود ندارد؛ زیرا هر خازن حقیقی علاوه بر راکتانس خازنی یک مقاومت نشتی دارد. به همین علت، هر خازن حقیقی را می‌توان به صورت یک مقاومت اهمی و یک راکتانس خازنی ایده‌آل به صورت مدار R-C سری یا موازی مدل کرد و سپس مدار آن را تحلیل نمود. در این فصل، رفتار مدارهای R-C سری و موازی در جریان متناوب در حالت پایدار (ماندگار) بررسی خواهیم کرد؛ زیرا حالت‌های گذرای این مدارها از محدوده‌ی بحث ما خارج است. پاسخ گذرا در مدارهای الکتریکی عکس‌العمل مدار در مقابل تغییرات جریان و ولتاژ شبکه است که با گذشت زمان از بین می‌رود.

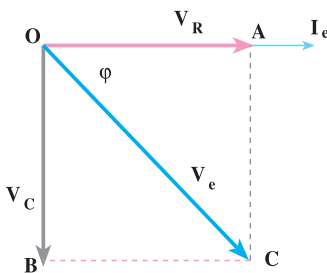
۴-۲- مدار R-C سری

مدار الکتریکی R-C سری مطابق شکل ۴-۱ است. ولتاژ منبع از ولتاژ V_R و V_C تشکیل می‌شود. جریان در هر دو عنصر C و R یکسان و برابر I_e است. ولتاژ دو سر مقاومت اهمی با جریان I_e هم فاز و ولتاژ دو سر خازن V_C از جریان I_e ، 90° الکتریکی پس فاز است. برای به دست آوردن ولتاژ V_e ، چون \vec{V}_R و \vec{V}_C بردارهای جداگانه‌ای هستند، از دیاگرام برداری استفاده می‌کنیم. برای رسم دیاگرام برداری، جریان I_e را مبنا قرار می‌دهیم و \vec{V}_R را هم فاز با جریان و \vec{V}_C را 90° پس فاز از جریان مطابق شکل ۴-۲ رسم می‌کنیم. جمع برداری $\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_C$ ، ولتاژ منبع و به عبارت دیگر، ولتاژ دوسر R-C سری را نشان خواهد داد. اگر جریان لحظه‌ای مدار را به صورت $i = I_m \sin(\omega t)$ فرض کنیم، ولتاژ لحظه‌ای V_C و V_R به صورت‌های زیر بیان خواهند شد:

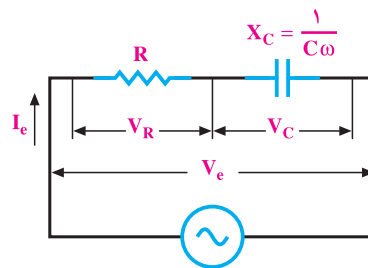
$$i = I_m \sin \omega t \quad (4-1)$$

$$V_R = I_m \cdot R \sin \omega t \quad \text{هم فاز با جریان} \quad (4-2)$$

$$V_C = I_m \cdot X_C \sin(\omega t - 90^\circ) \quad 90^\circ \text{ درجه عقب‌تر از جریان} \quad (4-3)$$



شکل ۴-۲- دیاگرام برداری مدار R-C سری



شکل ۴-۱- مدار الکتریکی R-C سری

۴-۲-۱- محاسبه‌ی امپدانس مدار R - C سری: در شکل ۴-۱ و دیاگرام برداری

شکل ۴-۲ می‌توان نوشت:

$$V_R = R \cdot I_e \quad (۴-۴)$$

$$V_c = I_e X_c = I_e \times \frac{1}{C\omega} = \frac{I_e}{\omega C} \quad (۴-۵)$$

در مثلث OAC شکل ۴-۲ می‌توان نوشت:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$$

$$V_e^2 = V_R^2 + V_c^2$$

$$I_e^2 Z^2 = I_e^2 R^2 + I_e^2 X_c^2$$

$$Z^2 = R^2 + X_c^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} \quad (۴-۶)$$

۴-۲-۲- محاسبه‌ی اختلاف فاز و ضریب‌توان در مدار R - C سری: از شکل ۴-۲

و مثلث OAC می‌توان نوشت:

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{V_c}{V_R} = \frac{I_e \cdot X_c}{I_e \cdot R} \quad (۴-۷)$$

بنابراین، اختلاف فاز برابر است با:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{X_c}{R} = \tan^{-1} \frac{1}{R \cdot C \cdot \omega} \quad (۴-۸)$$

ضریب‌توان برابر است با:

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{V_R}{V_e} = \frac{I_e \cdot R}{I_e \cdot Z}$$

$$\cos \varphi = \frac{V_R}{V_e} = \frac{R}{Z} \quad (۴-۹)$$

$\sin \varphi$ را از شکل ۴-۲ و مثلث OAC می‌توان به‌قرار زیر حساب کرد:

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{V_c}{V_e} = \frac{I_e \cdot X_c}{I_e \cdot Z}$$

$$\sin \varphi = \frac{V_C}{V_e} = \frac{X_C}{Z} \quad (4-10)$$

۴-۲-۳- محاسبه‌ی توان‌ها در مدار R-C سری: برای توان مؤثر می‌توان نوشت:

$$P_e = RI_e^2 \quad (4-11)$$

$$R = Z \cos \varphi \quad \text{از رابطه‌ی ۴-۹ مقاومت R برابر است با:}$$

$$Z = \frac{V_e}{I_e} \quad \text{از طرف دیگر، امپدانس مدار برابر است با:}$$

با جایگزینی مقادیر در رابطه‌ی ۴-۱۱ توان مؤثر به صورت رابطه‌ی ۴-۱۲ ظاهر می‌شود:

$$P_e = Z \cos \varphi \times I_e^2$$

$$P_e = \frac{V_e}{I_e} \cos \varphi \times I_e^2$$

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi \quad (4-12)$$

برای محاسبه‌ی توان غیرمؤثر می‌توان نوشت:

$$P_d = -I_e^2 X_C \quad (4-13)$$

از رابطه‌ی ۴-۱۰ مقادیر X_C و Z را در رابطه‌ی ۴-۱۳ جایگزین می‌کنیم.

$$X_C = Z \sin \varphi \quad \text{و} \quad Z = \frac{V_e}{I_e} \quad \text{و} \quad \sin \varphi = \frac{X_C}{Z}$$

$$P_d = I_e^2 \cdot Z \sin \varphi = I_e^2 \frac{V_e}{I_e} \sin \varphi$$

بنابراین:

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi \quad (4-14)$$

در مدارهای R - C جریان پیش‌فاز است؛ بنابراین قرارداد توان P_d را با علامت منفی خواهیم

داشت.

یعنی:

$$P_d = -V_e I_e \sin \varphi$$

از رابطه‌های ۴-۱۲ و ۴-۱۴ توان ظاهری را به قرار زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{V_e^2 I_e^2 \cos^2 \varphi + V_e^2 I_e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$P_s = V_e I_e$$

(۴-۱۵)

مثال ۱: در یک مدار R - C سری متشکل از $R = ۸\Omega$ و $C = ۳۰\mu F$ ، در چه فرکانسی

جریان مدار ۳° از ولتاژ پیش فاز خواهد شد؟

راه حل:

$$\varphi = -۳^\circ \quad \text{و} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{1}{2\pi fCR}$$

$$\tan ۳^\circ = \frac{1}{2\pi fCR}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2\pi \times f \times ۳۰ \times ۱۰^{-6} \times ۸} \Rightarrow f = \frac{3 \times 10^6}{\sqrt{3} \times 2\pi \times ۳۰ \times ۸}$$

$$f = ۱۱۴۹ / ۲ \text{ Hz}$$

مثال ۲: در یک مدار R-C سری، تابع تغییرات ولتاژ و جریان به ترتیب $V = ۲۲ \cdot \sin(۱۰^\circ \pi t)$

و $i = ۵ \sin(۱۰^\circ \pi t + ۶^\circ)$ است. مطلوب است:

الف - عناصر مدار R و C

ب - معادله‌ی زمانی ولتاژ دو سر مقاومت اهمی و خازن.

پ - رسم منحنی تغییرات ولتاژ و جریان کل و ولتاژ دوسر مقاومت اهمی و خازن.

ت - رسم دیاگرام برداری ولتاژها.

ث - محاسبه‌ی توان‌ها و رسم مثلث توان‌ها.

راه حل:

الف - از معادلات ولتاژ و جریان می‌توان نوشت:

$$V_e = \frac{۲۲^\circ}{\sqrt{2}} = ۱۵۵/۶ \text{ ولت} \quad \text{و} \quad I_e = \frac{۵}{\sqrt{2}} = ۳/۵۳ \text{ A}$$

$$\omega = ۱۰^\circ \pi \quad \text{و} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{۱۰^\circ \pi}{2\pi} = ۵^\circ \text{ Hz}$$

$$\varphi = \theta_v - \theta_i = ۰ - ۶^\circ = -۶^\circ \quad \text{و} \quad I_m = ۵ \text{ A} \quad \text{و} \quad V_m = ۲۲^\circ \text{ V}$$

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{۲۲^\circ}{۵} = ۴۴ \Omega$$

از روابط ۴-۹ و ۴-۱۰ می‌توان نوشت:

$$R = Z \cos \varphi = ۴۴ \times \cos(-۶^\circ) = ۴۴ \times \frac{1}{2} = ۲۲ \Omega$$

$$X_C = Z \sin \varphi = 44 \sin 6^\circ = 44 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 38 / \Omega$$

$$C = \frac{1}{X_C \cdot \omega} = \frac{1^\circ}{38 / 1 \times 10^3 \pi} = 83 / 58 \mu F$$

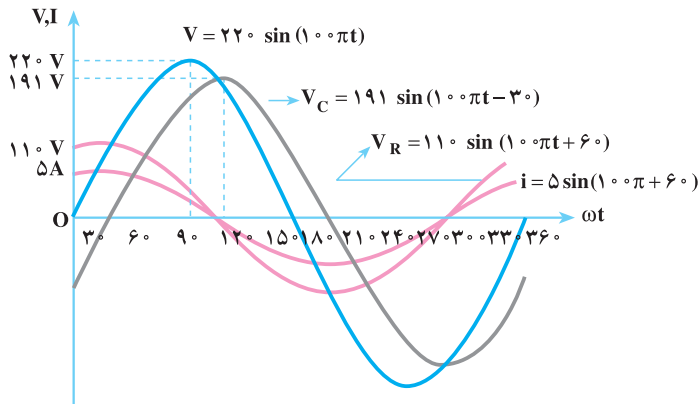
$$V_R = R \cdot I_m \sin(\omega t + \theta_i) \quad \text{--- ب}$$

$$V_R = 22 \times 5 \times \sin(100\pi t + 6^\circ)$$

$$V_R = 110 \sin(100\pi t + 6^\circ)$$

$$V_C = I_m \cdot X_C \sin(100\pi t + \theta_i - 9^\circ)$$

$$V_C = 5 \times 38 / 1 \sin(100\pi t + 6^\circ - 9^\circ) = 191 \sin(100\pi t - 3^\circ)$$



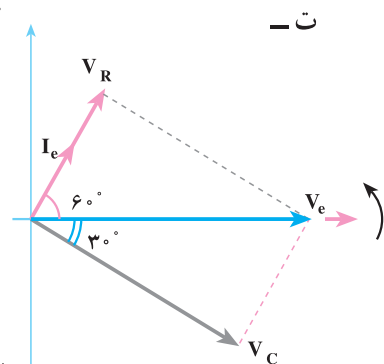
شکل ۴-۳

$$V_C = \frac{191}{\sqrt{2}} = 135 \text{ ولت} \quad \text{و} \quad \theta_{V_C} = -3^\circ$$

$$V_R = \frac{110}{\sqrt{2}} = 77 / 78 \text{ ولت} \quad \text{و} \quad \theta_{V_R} = 6^\circ$$

$$I_e = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3 / 53 \text{ A} \quad \text{و} \quad \theta_i = 6^\circ$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I = 0 - 6^\circ = -6^\circ$$

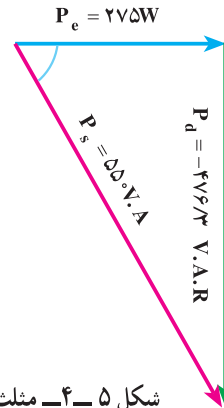


شکل ۴-۴- دیاگرام برداری

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi = I_e^2 R = \frac{22^\circ}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \cos 6^\circ = 275 \text{ W} \quad \text{ث -}$$

$$P_d = -V_e I_e \sin \varphi = -I_e^2 X_C = \frac{-22^\circ}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \sin 6^\circ = -476 / 3 \text{ V.A.R}$$

$$P_s = V_e I_e = \frac{22^\circ}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = 55^\circ \text{ V.A}$$



شکل ۵-۴- مثلث توان‌ها

۴-۲-۴ ضریب کیفیت مدار R-C سری : با توجه به رابطه‌ی ضریب کیفیت (Q) و

تحلیلی مشابه مدارهای R-L سری (قسمت ۳-۶) می‌توان رابطه‌ی (۴-۱۶) را به‌دست آورد.

$$Q = \frac{1}{C\omega R} \text{ یا } Q = \frac{X_C}{R} \quad (4-16)$$

مثال ۳: ضریب کیفیت در مدار مثال ۲ چه قدر است؟

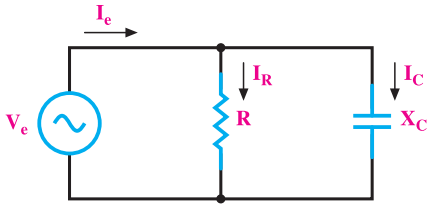
$$X_C = Z \sin \varphi = 38 / 18$$

$$R = Z \cos \varphi = 22 \Omega$$

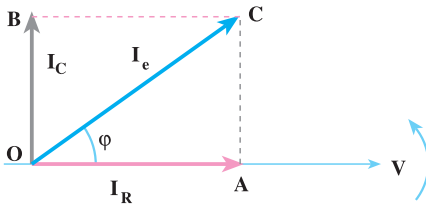
$$Q = \frac{X_C}{R} = \frac{38 / 18}{22} = 1 / 73$$

۴-۳-۳ مدار R-C موازی

یک خازن حقیقی را عملاً به‌صورت یک خازن ایده‌آل و یک مقاومت اهمی موازی با آن مدل می‌کنند. مقاومت اهمی موازی شده را **مقاومت نشتی خازن** گویند و علت تخلیه‌ی خازن را در مرور زمان به‌وسیله‌ی این مدار توجیه می‌کنند. الکترون‌ها از طریق این مقاومت بزرگ از پلاریته‌ی



شکل ۴-۶- مدار الکتریکی R - C موازی



شکل ۴-۷- دیاگرام برداری مدار R - C موازی

مثبت خازن (صفحه‌ی مثبت) به طرف پلاریته‌ی منفی خازن (صفحه‌ی منفی)، مدارشان را کامل می‌کنند و خازن تخلیه می‌شود. مدار الکتریکی R-C موازی مطابق شکل ۴-۶ است. ولتاژ هر دو عنصر C و R باهم یکسان و برابر ولتاژ منبع است. جریان کل مدار از دو جریان غیرهم‌فاز I_R (اهمی) و I_C (خازنی) تشکیل می‌شود. جریان I_R با ولتاژ منبع هم‌فاز و جریان I_C از ولتاژ منبع 90° درجه پیش‌فاز است. برای مطالعه‌ی مدار R-C موازی و تحلیل آن، دیاگرام برداری جریان‌ها را مطابق شکل ۴-۷ رسم می‌کنند و محاسبه‌های لازم را انجام می‌دهند.

چون ولتاژ هر دو عنصر C و R یکسان است، در رسم دیاگرام به منظور سادگی محاسبات، ولتاژ را مبنا قرار می‌دهند.

۴-۳-۱- محاسبه‌ی امپدانس مدار R - C موازی: با استفاده از شکل‌های ۴-۶ و

۴-۷ می‌توان نوشت:

$$I_R = \frac{V_e}{R} \quad (4-17)$$

$$I_C = \frac{V_e}{X_C} \text{ و } I_e = \frac{V_e}{Z} \quad (4-18)$$

نتیجه‌ی جمع دو بردار \vec{I}_R و \vec{I}_C جریان \vec{I}_e است.

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_C$$

با توجه به مثلث OAC خواهیم داشت:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$$

$$I_e^{\vee} = I_R^{\vee} + I_C^{\vee} \quad (4-19)$$

با جایگزینی روابط 4-17 و 4-18 در رابطه ی 4-19 خواهیم داشت :

$$V_e = I_e Z \Rightarrow Z = \frac{V_e}{I_e}$$

$$\frac{V_e^{\vee}}{Z^{\vee}} = \frac{V_e^{\vee}}{R^{\vee}} + \frac{V_e^{\vee}}{X_C^{\vee}}$$

$$\frac{1}{Z^{\vee}} = \frac{1}{R^{\vee}} + \frac{1}{X_C^{\vee}} \Rightarrow Z = \frac{R \cdot X_c}{\sqrt{R^{\vee} + X_c^{\vee}}} \quad (4-20)$$

۴-۳-۲ محاسبه ی اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان و ضریب توان: برای محاسبه ی

اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان از مثلث OAC شکل 4-7 استفاده می کنیم و می نویسیم :

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{I_C}{I_R}$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{V_e R}{V_e X_C}$$

با ساده کردن رابطه، خواهیم داشت :

$$\tan \varphi = \frac{I_C}{I_R} = \frac{R}{X_C} = RC\omega \quad (4-21)$$

اگر از رابطه ی 4-21، \arctan گرفته شود، زاویه ی φ (اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ) به دست می آید .

$$\varphi = \tan^{-1}(RC\omega) \quad \text{یا} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{I_C}{I_R}\right) \quad (4-22)$$

کسینوس زاویه ی φ به دست آمده در رابطه ی 4-22 ضریب توان را تعیین می کند. برای محاسبه ی ضریب توان از مثلث OAC در شکل 4-7 می توان نوشت :

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{I_R}{I_e} = \frac{V_e Z}{V_e R}$$

بنابراین :

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I_e} = \frac{Z}{R} \quad (4-23)$$

برای تعیین $\sin \varphi$ ، از مثلث OAC شکل ۷-۴ می‌توان نوشت :

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{I_C}{I_e} = \frac{V_e Z}{V_e X_C}$$
$$\sin \varphi = \frac{I_C}{I_e} = \frac{Z}{X_C} \quad (4-24)$$

۳-۳-۴- محاسبه‌ی ضریب کیفیت مدار R-C موازی: می‌دانید که انرژی ذخیره‌شده

در یک خازن به ظرفیت C و ولتاژ دوسر آن (V) از رابطه‌ی $W = \frac{1}{2} CV^2$ به دست می‌آید. ماکزیمم

انرژی ذخیره‌شده توسط ولتاژ ماکزیمم V_m ایجاد می‌شود؛ بنابراین، $W_m = \frac{1}{2} CV_m^2$ ماکزیمم

انرژی ذخیره شده در خازن خواهد بود. انرژی مصرفی در مقاومت اهمی در یک سیکل از رابطه‌ی

$$I_e = \frac{V_e}{R} \quad W = P \cdot T = I_e^2 R \times \frac{2\pi}{\omega}$$

به دست می‌آید. برای محاسبه‌ی ضریب کیفیت می‌توان نوشت :

$$Q = \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره در خازن}}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}}$$

$$Q = \frac{2\pi \left(\frac{1}{2} CV_m^2 \right)}{R \times \frac{V_e^2}{R} \times \frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow Q = RC\omega \quad (4-25)$$

۳-۳-۴- توان‌ها در مدار R-C موازی: با توجه به روش محاسبه‌ی توان‌ها در مدارهای

R-C می‌توان نوشت :

P_e توان مؤثر به صورت زیر نوشته می‌شود :

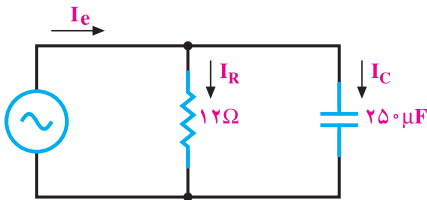
$$P_e = I_R^2 R = \frac{V_e^2}{R} = V_e I_e \cos \varphi \quad (4-26)$$

P_d توان غیر مؤثر از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود :

$$P_d = -I_C X_C = -\frac{V_e^2}{X_C} = -V_e I_e \sin \phi \quad (4-27)$$

P_s توان ظاهری برابر است با :

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = V_e I_e \quad (4-28)$$



مثال ۴: در مدار RC موازی شکل مقابل

اگر ولتاژ منبع $v = 192\sqrt{2} \sin 25^\circ t$ باشد،
مطلوب است :

الف: جریانی هر شاخه و معادلات آن‌ها.

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{25^\circ \times 10^{-6} \times 25^\circ} = 16 \Omega$$

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{192\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 192V$$

$$I_R = \frac{V_e}{R} = \frac{192}{12} = 16A$$

$$I_{Rm} = I_R \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}A$$

$$i_R = 16\sqrt{2} \sin 25^\circ t$$

$$I_C = \frac{V_e}{X_c} = \frac{192}{16} = 12A$$

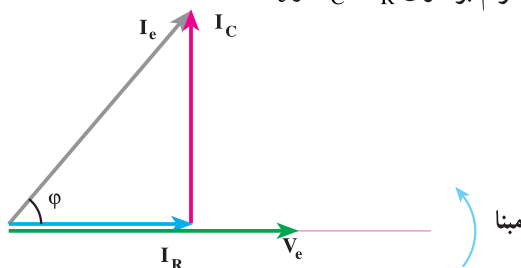
$$I_{cm} = I_C \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}A$$

$$i_C = 12\sqrt{2} \sin(25^\circ t + 9^\circ)$$

جریان مقاومت هم فاز با ولتاژ

جریان خازن 9° درجه جلوتر (پیش فاز) از ولتاژ

ب: رسم دیاگرام برداری \vec{I}_R ، \vec{I}_C و \vec{I}_e .



شکل ۸-۴

پ: جریان کل و معادله‌ی آن:

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_C = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ A} \quad \text{با توجه به شکل ۸-۴ داریم:}$$

$$I_m = I_e \sqrt{2} = 20 \sqrt{2} \text{ A}$$

از رابطه‌ی ۲۲-۴ خواهیم داشت:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{I_C}{I_R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{12}{16} \right) = 37^\circ$$

$$i = 20 \sqrt{2} \sin(250t + 37^\circ) \quad \text{I به اندازه‌ی } \varphi \text{ از V جلوتر است.}$$

ت: امپدانس مدار.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C} \quad \text{از رابطه‌ی ۲۰-۴ داریم:}$$

ولی با داشتن V_e و I_e که ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی Z رابطه‌ی ۱-۳ است.

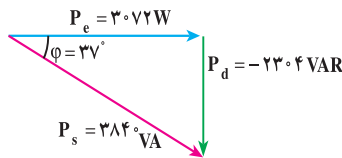
$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{192 \sqrt{2}}{20 \sqrt{2}} = 9.6 \Omega$$

ث: محاسبه‌ی توان‌ها و رسم مثلث توان.

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi = 192 \times 20 \times \cos(37^\circ) = 3072 \text{ W}$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = 192 \times 20 \times \sin(-37^\circ) = -2304 \text{ VAR}$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{(3072)^2 + (-2304)^2} = 3840 \text{ VA}$$



۴-۴ تأثیر فرکانس بر مدارهای R-C

با توجه به امپدانس‌های محاسبه‌شده برای مدار R-C سری، $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ و مدار R-C

موازی $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C}$ و در نظر گرفتن این که $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$ ، مشخص می‌شود. تغییرات فرکانس

مدار در امپدانس مدار R-C سری و موازی اثر می‌گذارد. کمیت‌های $\cos \varphi$ و $\sin \varphi$ و به طریقی به

امپدانس مدار مرتبطاند؛ بنابراین، تغییرات فرکانس، این کمیت‌ها را نیز تغییر می‌دهد.

هم‌چنین با توجه به این‌که $I_e = \frac{V_e}{Z}$ ، $P_e = V_e I_e \cos \varphi$ ، $P_d = V_e I_e \sin \varphi$ و

$P_s = V_e I_e$ هستند، این کمیت‌ها نیز با تغییرات حاصل در فرکانس شبکه تغییر خواهند کرد. با در نظر گرفتن مطالب گفته شده تأثیر فرکانس را بر روی جریان و امپدانس مدار R - C سری و موازی به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

۴-۲-۱- تأثیر فرکانس در مدار R - C سری: در شکل ۴-۱ فرض می‌کنیم فرکانس

منبع ولتاژ از صفر تا ∞ تغییر کند ولی دامنه‌ی ولتاژ ثابت باقی بماند. مقادیر R و C نیز در تغییرات فرکانس مقادیر ثابت باقی بمانند. فرکانس مدار را هم صفر در نظر می‌گیریم. می‌دانیم در جریان DC فرکانس مدار صفر است. خازن در مدارهای DC خیلی سریع شارژ می‌شود و جریان مدار را قطع می‌کند و منبع ولتاژ با مدار باز - یعنی امپدانس بی‌نهایت - مواجه می‌شود. بنابراین:

$$f = 0 \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \infty \quad \text{و} \quad I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\infty} = 0$$

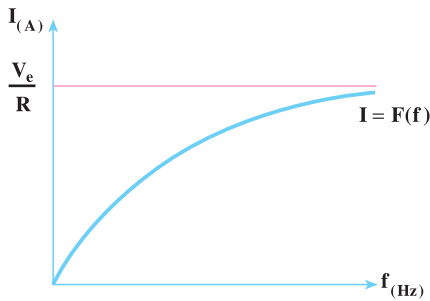
اگر فرکانس از صفر به بی‌نهایت تغییر کند، امپدانس مدار کاهش یافته و جریان افزایش می‌یابد؛ به‌گونه‌ای که در فرکانس بی‌نهایت مقدار $X_C = 0$ و امپدانس مدار $Z = R$ و $I = \frac{V}{R}$ می‌شود. دلیل این‌که خازن اتصال کوتاه می‌شود، تغییرات سریع پلاریته‌ی صفحات آن در فرکانس‌های زیاد است. خازن با وجود این تغییرات سریع نمی‌تواند عکس‌العمل نشان دهد و جریان به‌راحتی از آن عبور می‌کند. بنابراین:

$$f \rightarrow \infty \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2} = R \quad \text{و} \quad I = \frac{V}{R}$$

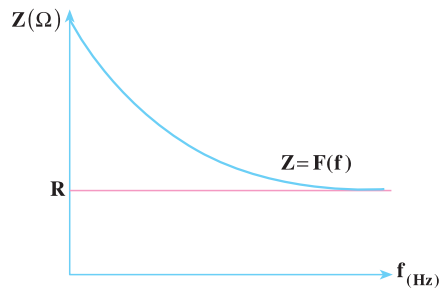
ضریب کیفیت مدار $Q = \frac{1}{RC\omega} = \frac{1}{\omega RC}$ در فرکانس‌های کم‌تر خیلی بالا و در فرکانس

بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کند. منحنی تغییرات جریان و امپدانس مدار R - C را در فرکانس‌های متغیر می‌توان به‌صورت شکل‌های ۴-۹ از طریق نقطه‌یابی رسم کرد.

$f(\text{Hz})$	0	∞
$Z(\Omega)$	∞	R
$I(\text{A})$	0	$\frac{V_e}{R}$



ب: منحنی تغییرات جریان در اثر فرکانس



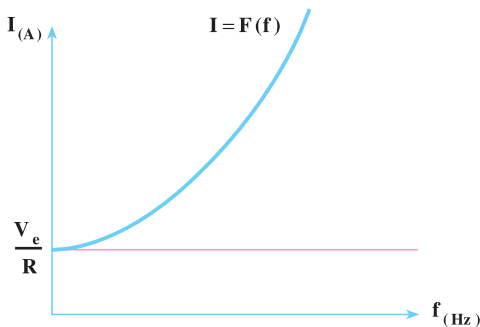
الف: منحنی تغییرات امپدانس در اثر فرکانس

شکل ۴-۹ - تأثیر فرکانس بر مقادیر I ، Z در R-C سری

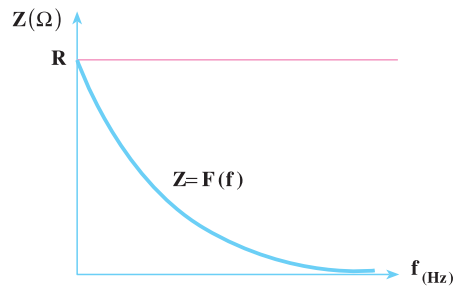
۲-۴-۴- تأثیر فرکانس در مدار R-C موازی: در یک مدار R - C موازی فرض

می‌کنیم فرکانس منبع تغذیه در دامنه‌ی ثابت تغییر کند و در این تغییرات مقدار عناصر R و C ثابت باشند. اگر فرکانس مدار صفر باشد، خازن شاخه‌ی موازی مربوط به خود را در اثر شارژ در حالت دائمی باز می‌کند و جریان $I_c = 0$ می‌شود. در این حالت، جریان مدار برابر جریان I_R خواهد شد و امپدانس $Z = R$ می‌شود. اگر فرکانس $f = \infty$ شود، شاخه‌ی خازنی اتصال کوتاه می‌کند و جریان I_c بی‌نهایت می‌شود. در این حالت $Z = 0$ خواهد بود. منحنی تغییرات جریان و امپدانس در R - C موازی نسبت به تغییرات فرکانس مطابق شکل ۴-۱۰، از طریق نقطه‌یابی رسم می‌شود.

$f_{(Hz)}$	۰	∞
$Z_{(\Omega)}$	R	۰
$I_{(A)}$	$\frac{V_e}{R}$	∞



ب: منحنی تغییرات $I = F(f)$

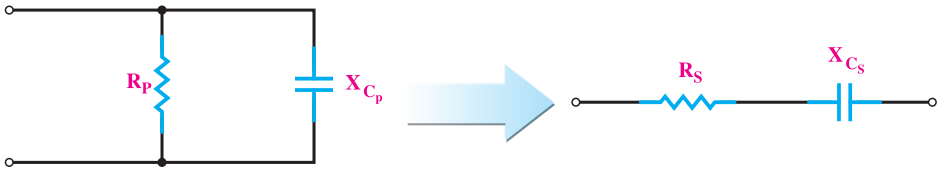


الف: منحنی تغییرات $Z = F(f)$

شکل ۴-۱۰ - تأثیر فرکانس بر مقادیر I و Z در R-C موازی

۴-۵ تبدیل مدار R-C سری به مدار موازی و برعکس

مدار R-C موازی را در نظر بگیرید می‌خواهیم معادل سری آن را به دست آوریم. در مدار معادل باید Z_P و φ_P با Z_S و φ_S مدار قبل از تبدیل یکی باشد.



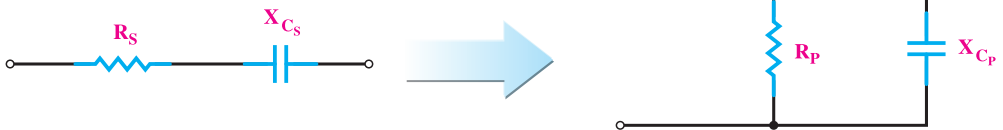
$$Z_P = \frac{R_P \cdot X_{C_P}}{\sqrt{R_P^2 + X_{C_P}^2}}$$

$$\cos \varphi_P = \frac{Z_P}{R_P}$$

$$R_S = \frac{Z_P^2}{R_P}$$

$$X_{C_S} = \frac{Z_P^2}{X_{C_P}}$$

در تبدیل سری به موازی خواهیم داشت:



$$Z_S = \sqrt{R_S^2 + X_{C_S}^2}$$

$$\cos \varphi_S = \frac{R_S}{Z_S}$$

$$R_P = \frac{Z_S^2}{R_S}$$

$$X_{C_P} = \frac{Z_S^2}{X_{C_S}}$$



۱- یک مقاومت $R = 10 \Omega$ با یک خازن به راکتانس $X_C = 10\sqrt{3} \Omega$ به صورت سری به یک منبع ولتاژ با معادله $v = 100 \sin 250^\circ t$ متصل است. مطلوب است:

الف: معادله‌ی جریان منبع.

ب: معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان.

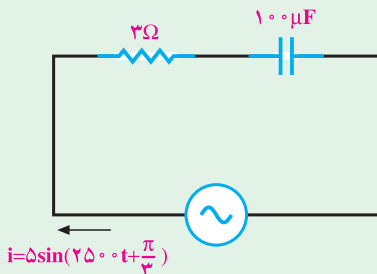
پ: محاسبه‌ی توان‌های مدار و رسم مثلث توان‌ها.

جواب:

$$i(t) = 5 \sin(250^\circ t + 6^\circ)$$

$$v_C(t) = 50\sqrt{3} \sin(250^\circ t - 3^\circ)$$

$$v_R(t) = 50 \sin(250^\circ t + 6^\circ)$$



۲- در مدار مقابل مطلوب است:

الف: معادله‌ی ولتاژ منبع.

ب: معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان.

پ: رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار.

۳- در یک مدار $R-C$ سری معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع به ترتیب $V = 100 \sin(250^\circ t - \frac{\pi}{6})$

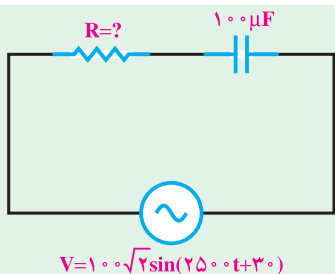
و $i = 2 \sin(250^\circ t + \frac{\pi}{6})$ می‌باشد. اندازه‌ی R و C چه قدر است؟

جواب: $R = 25 \Omega$ و $C = 9/23 \mu F$

۴- یک خازن با راکتانس $X_C = 5 \Omega$ با یک مقاومت نامشخص به طور سری به هم متصل اند.

اگر جریان به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$ رادیان از ولتاژ جلو باشد، مقدار R چند اهم است؟

جواب: $R = 2/88 \Omega$



$$V = 100\sqrt{2}\sin(250\pi t + 30^\circ)$$

۵- در مدار شکل روبه‌رو اگر $Z = 5\Omega$ باشد، اندازه‌ی R چند اهم است؟

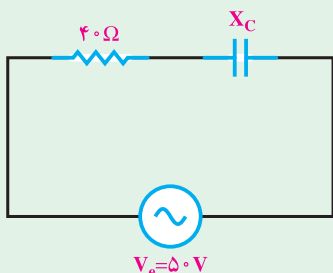
$$R = 3\Omega$$

جواب:

۶- خازنی به ظرفیت $100\mu\text{F}$ با یک مقاومت 20Ω سری شده‌اند. در چه فرکانسی ضریب کیفیت مدار $\frac{5}{\pi}$ می‌شود؟

$$f = 50\text{Hz}$$

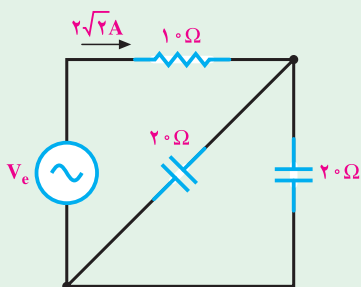
جواب:



$$V_e = 50\text{V}$$

۷- در مدار شکل روبه‌رو، ولتاژ دو سر خازن $V_C = 30\text{V}$ است. ضریب توان و اندازه‌ی X_C چند اهم است؟

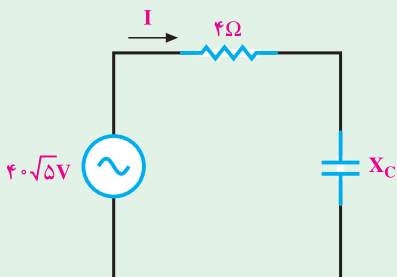
$$\text{جواب: } X_C = 30\Omega \text{ و } \cos\phi = 0.8$$



۸- در مدار روبه‌رو ولتاژ منبع چند ولت است؟

$$V_e = 40\text{V}$$

جواب:



۹- ضریب کیفیت مدار روبه‌رو $Q = 2$ است. جریان مدار چند آمپر است؟

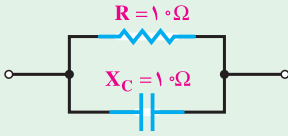
$$I = 10\text{A}$$

جواب:

۱۰- مدار R-C موازی شکل روبه‌رو را به

یک مدار R-C سری تبدیل کنید.

جواب: $R_S = 5\Omega$ و $X_{C_S} = 5\Omega$

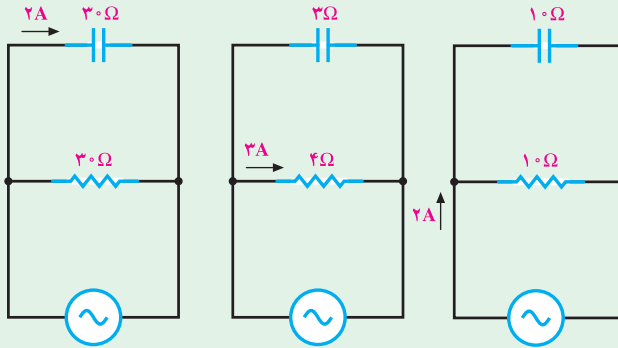


۱۱- در هر یک از مدارهای زیر مطلوب است:

الف: معادله‌ی جریان و ولتاژ منبع. ($\theta_V = 0^\circ$)

ب: توان‌های مدار و رسم مثلث توان.

پ: رسم دیاگرام برداری جریان‌ها و ولتاژ مدار.



۱۲- در یک مدار R-C موازی معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $v(t) = 200 \sin 1000t$ و

$i(t) = 10 \sin(1000t + \frac{\pi}{4})$ می‌باشد. اندازه‌ی R و C چه قدر است؟

جواب: $R = 20\sqrt{2}\Omega$ و $C = 3/53 \mu F$

۱۳- در مدار شکل روبه‌رو مطلوب است:

الف: جریان هر شاخه و معادلات زمانی آن‌ها.

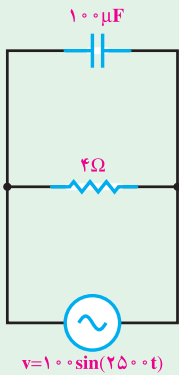
ب: در صورت دو برابر شدن فرکانس، بند الف را محاسبه کنید.

پ: در صورت نصف شدن فرکانس، بند الف را محاسبه کنید.

ت: جواب‌های بند الف، ب و پ را مقایسه کنید.

جواب الف: $I_R(t) = 25 \sin(2500t + 0^\circ)$

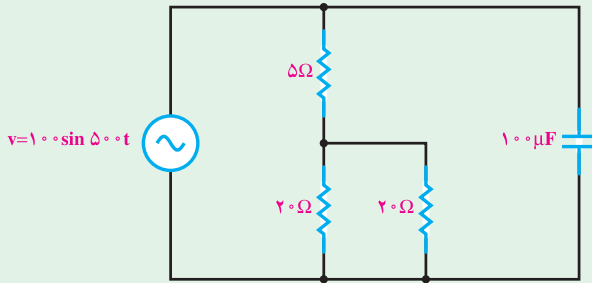
$I_C(t) = 25 \sin(2500t + 90^\circ)$



۱۴- در مدار شکل زیر مطلوب است :

الف : امپدانس کل مدار.

ب : ضریب قدرت شبکه.



$$Z = 12\Omega$$

جواب :

$$\cos \phi = 0.8$$